表題

久留米大学医学部解答解説

設問（1） ２枚とも表がでる確率は$\frac{1}{4}$　それ以外の場合の確率は$\frac{3}{4}$

n＋1 回目にAが投げる確率をp_{n+1}とするならば

$p_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{3}{4}(1-p_n)$ という関係式がなりたつ

$p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{3}{4}$　　$p_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)\right\}$

$\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{1}{2}$

設問（2）

$x+y=k$ とおく........ ①

与えられた関数は整理すると　$y-\frac{1}{4}=\frac{1}{16\left(x-\frac{1}{4}\right)}$........... ②

①は傾き-1 の直線を表す

②は漸近線が $x=\frac{1}{4}$　$y=\frac{1}{4}$　の双曲線を表し、与えられたx, y　の範囲より

双曲線と正方形が示す領域が分かる

$x+y=k$ の最小値は ②と①が接する際のkの値である

①②を連立すると　$4x^2-4kx+k=0$ .... ③が得られる

③の判別式　$\frac{D}{4}=4k^2-4k=0$　$k=0$，1

$k=0$は$0<x\leqq 1$　$0<y\leqq 1$ の条件に適しない　$k=1$ が最小値となる

$k=1$ を③に代入して$x=\frac{1}{2}$........ ④　④と①より$y=\frac{1}{2}$

最大値については図を描いていけば　$x=1$　$y=\frac{1}{3}$ および　$x=\frac{1}{3}$　$y=1$

という$y=x$ の直線と線対象の位置にある２つの座標を①が通る場合と分かる

最大値は　$\frac{4}{3}$　となる

設問（3） $y=e^{ax}$ .... ①　　　$y=2e^{-ax}$ .... ②

①②の交点は　$(e^{ax})^2=2$　　$e^{ax}=\pm\sqrt{2}$（$-\sqrt{2}$ は不適）

$e^{ax}=\sqrt{2}$　　$ax=\log_e\sqrt{2}$　　$x=\frac{1}{a}\log_e\sqrt{2}$ .... ③

よって$y=\sqrt{2}$

$a>0$ の場合の①②およびy軸によって囲まれる部分の面積S_1を求める

③の値を以下αと表記する

$$S_1=\int_0^{\alpha}(2e^{-ax}-e^{ax})dx=\left[-\frac{2}{a}e^{-ax}-\frac{1}{a}e^{ax}\right]_0^{\alpha}=\frac{3}{a}-\frac{2\sqrt{2}}{a}$$

$a<0$ の場合は グラフを x軸が負の部分に描くことができ、①が右下がりの減少関数、②が右上がりの増加関数

S_1 のグラフをy軸対象に移動したものである

また交点の値はS_1の場合に等しい

$$S_2=\int_{\alpha}^{0}(2e^{-ax}-e^{ax})dx=-\frac{3}{a}+\frac{2\sqrt{2}}{a}$$

$a>0$ の場合の ①②およびy軸によって囲まれた部分をx軸を中心に回転させた場合の体積をVを求める

$$V=\pi\int_0^{\alpha}\{(2e^{-ax})^2-(e^{ax})^2\}dx=\pi\int_0^{\alpha}\{4e^{-2ax}-e^{2ax}\}=\pi\left[-\frac{2}{a}e^{-2ax}-\frac{1}{2a}e^{2ax}\right]_0^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{2a}\pi$$

設問（4）$\triangle ABC$の面積$S=\dfrac{1}{2}AC\times AB\sin 30^{\circ}=15$

$\triangle APR,\ \triangle BPQ,\ \triangle CQR$ のそれぞれの面積はSに対して

$t(1-t)$，$t^2(1-t)$，$t(1-t^2)$ の比で表わすことができる

$\triangle PQR=S-(\triangle APR+\triangle BPQ+\triangle CQR)$

$=S-St(1-t)-St^2(1-t)-St(1-t^2)=15(2t^3-2t+1)$

$f(t)=15(2t^3-2t+1)\quad f'(t)=15(6t^2-2)=0$

$0\leqq t\leqq 1$ より$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で極小値 すなわちこの問題では最小値をとる

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{5(9-4\sqrt{3})}{3}$が求める最小値である

設問（5）この問題は表現において不適切な部分があった。a_nを初項1 公比r の無限等比数列とするとあるが、無限等比級数$S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ を求めるならば $0<r<1$ の条件のもとでa_nは無限等比数列となるから、a_nは等比数列といえば足りた。

$a_n=r^{n-1}$　$b_n=1+(n-1)d$ とそれぞれ表す

$S=1+r(1+d)+r^2(1+2d)+\cdots\cdots\cdots\cdots+r^{n-1}\{1+(n-1)d\}\cdots\cdots$①

$rS=\quad r+r^2(1+d)+r^3(1+2d)\cdots\cdots\cdots+r^{n-1}\{1+(n-2)d\}+r^n\{1+(n-1)d\}\cdots$②

①−②より

$(1-r)S=1+rd+r^2d+\cdots\cdots\cdots+r^{n-1}d-r^n\{1+(n-1)d\}$

$$=1+\frac{dr(1-r^{n-1})}{1-r}-r^n\{1+(n-1)d\}$$

$$S=\frac{1}{1-r}+\frac{dr(1-r^{n-1})}{(1-r)^2}-\frac{r^n\{1+(n-1)d\}}{1-r}$$ と表せる……③

ここでa_nは $0<r<1$ とあるからr^{n-1} および r^n は0 となる

したがって$S=\dfrac{1}{1-r}+\dfrac{dr}{(1-r)^2}$ ……④

④を用いて$S=9$ のときの関係式は $9=\dfrac{1}{1-r}+\dfrac{dr}{(1-r)^2}$

変形して$d=9r+\dfrac{8}{r}-17\geqq 2\sqrt{9r\times\dfrac{8}{r}}-17=12\sqrt{2}-17$（最小値）

このときのr の値は $9r=\dfrac{8}{r}$ より$r=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ただし、$0<r<1$ より

$$r=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

設問（6）各位に1から6までの数字が現れる場合の数は$5\times4=20$ 通り

したがって求める数の総和は

$(100+10+1)(1+2+3+4+5+6)\times20=46620$

345より小さい整数の個数は1, 2 が100の位に来る場合が$2\times5\times4=40$通り

3が10の位に来る場合 $8+2=10$通り　　したがって合計50通りとなる

5の倍数とは下2桁の数が5で割り切れるので具体的に求めると

325, 315　　215, 235, 245, 265　　125, 135, 145, 165の計10通り

設問（7）$u\times\dfrac{1}{6}+u\times\dfrac{1}{3}=v\times\dfrac{1}{3}$ ……①

$v\times\dfrac{5}{6}=16-u\times\dfrac{60}{60}$……②

①②を解いて$u=\dfrac{64}{9}$　　$v=\dfrac{32}{3}$