[1]

$\cos 2\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right) = \sin 3\theta \Longrightarrow \begin{cases} 3\theta = \frac{\pi}{2}-2\theta \\ 3\theta = \pi - \left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right) \end{cases}$

$\theta = \frac{\pi}{10}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{10}$

$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$1-2\sin^2\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$4\sin^3\theta - 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

$(\sin\theta - 1)(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) = 0$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ $\sin\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

[2]

$\cos^2(2x-3\pi)$ を $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Longrightarrow \cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$ を利用して変形

$f(x) = \frac{\cos(4x-6\pi)+1}{2} = \frac{\cos 4\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)+1}{2}$

よって 周期は $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\cos^3(3x+\pi)$ を $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \Longrightarrow \cos^3\theta = \frac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}$ として

$g(x) = \frac{1}{4}\left\{\cos(9x+3\pi) + 3\cos(3x+\pi)\right\}$

$g(x)$ の周期は $\cos(3x+\pi)$ によって決定されるので $\frac{2\pi}{3}$.

($\cos(9x+3\pi)$ の周期 $\frac{2}{9}\pi$ は $\frac{2\pi}{9}\times 3 = \frac{2}{3}\pi$ となっている)

[3] (a) $1 ★ 3$ は $1^2 \leqq 2\cdot 3$ より $2\cdot 1^2$ に等しい. よって $\boxed{2}$

$3 ★ 1$ は $3^2 > 2\cdot 1$ より $2\cdot 3 + 2\cdot 1 = 8$ よって $\boxed{8}$

$(x-1) ★ x = 0$ の解を求めるには

$(x-1)^2 > 2x$ の場合 $(x-1) ★ x = 2(x-1) + 2x = 0$ となり

$x^2 - 4x + 1 > 0$ $x = \frac{1}{2}$

$x > 1+\sqrt{3}$ $x < 1-\sqrt{3}$ $x > 1+\sqrt{3}$ $x < 1-\sqrt{3}$ に適しない

(解なし)

$(x-1)^2 \leqq 2x$ の場合 $1-\sqrt{3} \leqq x \leqq 1+\sqrt{3}$

$(x-1) ★ x = 2(x-1)^2 = 0$ $x = 1$. $1-\sqrt{3} \leqq x \leqq 1+\sqrt{3}$ をみたすので

$\boxed{x = 1}$

3

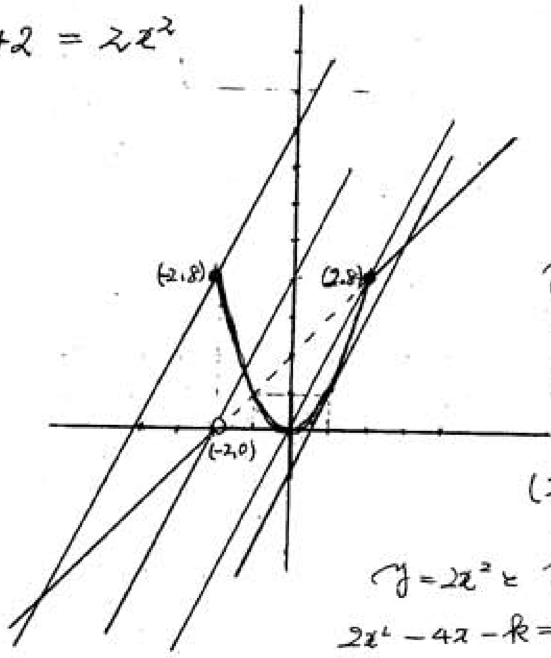
(b) まず $y = x \star 2$ のグラフをかかなければいけない

$x^2 > 2\cdot2 \Longrightarrow x<-2$ or $x>2$ の場合

$y = x\star2 = 2x+2\cdot2 = 2x+4$ となる ―― ①

$x^2 \leqq 4 \Longrightarrow -2 \leqq x \leqq 2$ の場合

$y = x\star2 = 2x^2$



$y=4x+k$ のグラフは傾き4で切片はkの直線である

$y=2x^2$ と $y=2x+4$ のグラフが連続していない点に注意すべきである

$y=4x+k$ に $(-2,8)$ を代入して

$k=16$

同様に $(-2,0)$ を代入して

$k=8$

$(2,8)$ を代入して

$k=0$

$y=2x^2$ と $y=4x+k$ が接する場合は

$2x^2-4x-k=0$ $\frac{D}{4}=4+2k=0$

$k=-2$

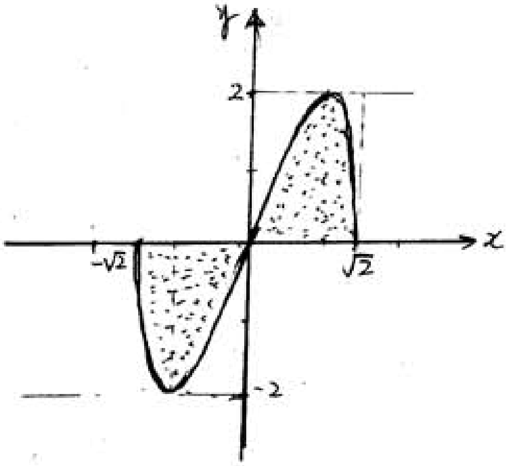
$$\left\{\begin{array}{ll} \text{交点が1つの場合は} & k<-2,\ 0<k\leqq8,\ k>16 \\ \text{交点が2つの場合は} & k=-2,\ k=0,\ 8<k\leqq16 \\ \text{交点が3つの場合は} & -2<k<0 \end{array}\right.$$

[4] $f(x) = 2x\sqrt{2-x^2}$ の定義域は $2-x^2 \geqq 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$

$$f'(x) = 2\sqrt{2-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{4(1-x^2)}{\sqrt{2-x^2}}$$

$f'(x) = 0$ より $x = \pm 1$

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0



$x=-1$ で -2 の最小値をとる
$x=1$ で 2 の最大値をとる

グラフは原点に関する点対称の図形となる
面積は一方を求めて2倍すればよい

$$S = 2\int_0^{\sqrt{2}} 2x\sqrt{2-x^2}\,dx$$

$\sqrt{2-x^2} = t \Rightarrow 2-x^2 = t^2$

$-2x \cdot \frac{dx}{dt} = 2t$

$2x\,dx = -2t\,dt$

$x: 0 \longrightarrow \sqrt{2}$
$t: \sqrt{2} \longrightarrow 0$

$$S = 2\int_{\sqrt{2}}^0 -2t \cdot t\,dt = -4\int_{\sqrt{2}}^0 t^2\,dt = 4\int_0^{\sqrt{2}} t^2\,dt$$
$$= \left[\frac{4}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

y軸に関してこのグラフを回転させる場合には

$y = 2x\sqrt{2-x^2} \Rightarrow y^2 = 4x^2(2-x^2) \Rightarrow 4x^4 - 8x^2 + y^2 = 0$

$$x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16-4y^2}}{4}$$

$x_1^2 = \frac{4+\sqrt{16-4y^2}}{4}$ $\quad x_2^2 = \frac{4-\sqrt{16-4y^2}}{4}$

$$V = 2\int_0^2 (\pi x_1^2 - \pi x_2^2)\,dy = 2\pi\int_0^2 \sqrt{4-y^2}\,dy$$

$\int_0^2 \sqrt{4-y^2}\,dy$ の面積は半径2の円の $\frac{1}{4}$ の大きさの面積であるから $\frac{4}{4}\pi = \pi$

$V = 2\pi^2$ となる

5

$$\int_1^3 \frac{\log x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\log 3 - \left[\frac{1}{x}\right]_1^3 = -\frac{1}{3}\log 3 - \left(\frac{1}{3}-1\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\log 3 + \frac{2}{3} = \frac{2-\log 3}{3}$$

$$\int_1^3 \frac{\log x}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\log x\right]_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{2x^3}\,dx = -\frac{1}{18}\log 3 - \left[\frac{1}{4x^2}\right]_1^3$$

$$= -\frac{1}{18}\log 3 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}-1\right) = -\frac{1}{18}\log 3 + \frac{2}{9}$$

$$= \frac{4-\log 3}{18}$$

$$\int_4^5 \frac{3x-7}{(x^3-6x^2+11x-6)}$$

$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$であるので

$$\frac{3x-7}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$ として

$$右辺 = \frac{A(x^2-5x+6)+B(x^2-4x+3)+C(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$3x-7 = (A+B+C)x^2 - (5A+4B+3C)x + 6A+3B+2C$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+3C=-3 \\ 6A+3B+2C=-7 \end{cases} \qquad A=-2.\ B=1.\ C=1.$$

$$与式 = \int_4^5 \left(\frac{-2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right)dx = \Big[-2\log(x-1) + \log(x-2) + \log(x-3)\Big]_4^5$$

$$= -4\log 2 + 3\log 3$$

6 $0 \leqq \theta \leqq \pi$とあるから

$\theta=0$の場合 $x=1$ となり. $1-2+a-3=0$ より $a=4$ となる. $(x-1)(x^2-x+3)=0$ $\boxed{x=1,\ \frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}}$

$\theta=\pi$の場合 $x=-1$ となり. $-1-2-a-3=0$ より $a=-6$ となる. $\boxed{x=-1.\ \frac{3\pm\sqrt{21}}{2}}$

$0<\theta<\pi$ の場合 $\cos\theta+i\sin\theta$が解ならば $\cos\theta-i\sin\theta$も解. よって残りの解をαとすると

解と係数の関係より $\begin{cases} \alpha+2\cos\theta=2 \\ 2\alpha\cos\theta+1=a \\ \alpha\cdot 1=3 \end{cases} \Longrightarrow \alpha=3.\ \cos\theta=-\frac{1}{2}$
$\theta=\frac{2}{3}\pi$

この場合の3つの解は
$3,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ となる

[この問題の設定は$0\leqq\theta\leqq\pi$となっているが、上で解いたように$\cos\theta+i\sin\theta$の解の形で表されないものが、解答となっている。本来は$0<\theta<\pi$とするべきだったと思われる]

$\boxed{7}$ 男1人の仕事量を x、女1人の仕事量を y とすると

仕事の総量 W は $W = 4x \times 120 = 6y \times 100 \Longrightarrow y = \frac{4}{5}x$

男2人と女3人で仕事をすると $\frac{480x}{2x+3y} = \frac{480x}{2x+\frac{12}{5}x} = \frac{480x}{\frac{22x}{5}} = \frac{1200}{11}$

$\frac{1200}{11} = 109\frac{1}{11}$ となる。よって 110日といわざるをえないだろう

(整数でないので不適切な出題)

40日は男3人で仕事をし、残りを男2人と女5人で仕事をするので

$$40 + \frac{480x - 120x}{2x+5y} = 40 + \frac{360x}{2x+4x} = 40 + 60 = 100\text{日}$$

$\boxed{8}$ 3回目を終えた時点で0以である確率は奇数が3回でる場合の余事象

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$$

5回目を終えた時点で0以上である確率は偶数の目が2回以上でる場合

$$1 - (\text{偶数が1回でる場合と奇数が5回でる場合})$$
$$= 1 - \frac{1}{2^5}(1+5) = \frac{13}{16}$$

9回目を終えた時点での期待値Eは

$$E = {}_9C_9\left(\tfrac{1}{2}\right)^9\cdot 18 + {}_9C_8\left(\tfrac{1}{2}\right)^8\left(\tfrac{1}{2}\right)(15) + {}_9C_7\left(\tfrac{1}{2}\right)^7\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 12 + {}_9C_6\left(\tfrac{1}{2}\right)^6\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 9 + {}_9C_5\left(\tfrac{1}{2}\right)^5\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\cdot 6$$
$$+ {}_9C_4\left(\tfrac{1}{2}\right)^4\left(\tfrac{1}{2}\right)^5\cdot 3 + {}_9C_3\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\left(\tfrac{1}{2}\right)^6\cdot 0 + {}_9C_2\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^7\cdot(-3) + {}_9C_1\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^8(-6) + {}_9C_0\left(\tfrac{1}{2}\right)^9(-9)$$
$$= \frac{1}{2^9}\left(18 + 15\,{}_9C_8 + 12\cdot{}_9C_7 + 9\,{}_9C_6 + 6\,{}_9C_5 + 3\,{}_9C_4 + 0 - 3\,{}_9C_2 - 6\,{}_9C_1 - 9\right)$$
$$= \frac{2304}{512} = \frac{9}{2}$$